МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
11.04.2024г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.22 Действительный анализ

1. Код и наименование направления подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки: математическое и компьютерное моделирование

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма образования: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений

6. Составители программы: Бондарев Андрей Сергеевич, доцент, к.ф.-м.н.; Петрова Анастасия Александровна, старший преподаватель, к.ф.-м.н.

7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол №0500-03 от 28.03.2024г.

8. Учебный год: 2026-2027 Семестр(ы): 5

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- доведение до студентов идей и методов действительного анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

Задачи учебной дисциплины:

- развитие у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа, в частности, вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерры.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК 1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и доказательств основных утверждений; Уметь: применять аппарат действительного анализа в решении практических задач; Владеть: навыками анализа и исследования конкретных задач.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и решения задач Уметь: Находить необходимый научный материал по действительному анализу для корректного создания математической модели практических задач Владеть: навыками моделирования конкретных задач с помощью средств действительного анализа для последующего их исследования численными методами.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108

Форма промежуточной аттестации: зачёт

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		
	Всего	По семестрам	
		Сем.5	
		ч.	ч., в форме ПП
Аудиторные занятия	54	54	
в том числе: лекции	18	18	
практические	36	36	
лабораторные			
Самостоятельная работа	54	54	
Контроль			
Итого:	108	108	
Форма промежуточной аттестации		Зачёт	

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Измеримые функции и множество C^+	Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла. Две леммы о последовательностях ступенчатых функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Множество функций C^+, действия над функциями из C^+. Конечность почти всюду функций из C^+.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+. Теорема о предельном переходе в C^+ под знаком интеграла. Следствие.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Критерий интегрируемости по Риману функции $x(t)$ в терминах функций $\underline{x}$ и $\overline{x}$, следствие. Теорема об интегрируемости функции по Риману в терминах последовательностей ступенчатых функций. Функции x, $\tilde{x}$ и доказательство равенств почти всюду $x = \underline{x}$, $\tilde{x} = \overline{x}$. Критерий --Лебега интегрируемости функции по Риману	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
1.2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	Суммируемые функции (определение). Действия над суммируемыми функциями. Интеграл в классе суммируемых функций (определение). Свойства интеграла. Лемма о представлении суммируемой функции. Теорема Беппо Леви, следствия 1 и 2.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911

		Теорема о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (три леммы). Следствия 1 и 2. Теорема Фату.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
1.3	Мера множества	Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Теорема об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств. Теорема о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Теорема о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств. Следствие о мере объединения измеримых множеств. Следствие о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
1.4	Теория Лебега	Внешняя мера множества. Теорема о внешней мере измеримого множества. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Функции, измеримые по Лебегу. Теорема о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
1.5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	Интегрирование по измеримому множеству. Простейшие свойства. Теорема об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Случай бесконечного промежутка.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911

		Доказательство измеримости предела измеримых функций. Мера пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.	
		Случай функции двух независимых переменных. Теорема Фубини (без док-ва). Теорема о суммируемости по прямоугольнику функции, для которой существует один из повторных интегралов, два следствия.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
1.6	Пространства суммируемых функций	Пространства $L_p[a,b]$. (определение и линейность для $0 \le p < \infty$). Неравенство Гельдера. Норма для случая $1 \le p < \infty$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Полнота пространства $L_p[a,b]$. Пространство $L_\infty[a,b]$ (определение и норма).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2. Практические занятия			
2.1	Множества меры нуль, измеримые функции, функции класса C^+	Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Множество функций C^+, действия над функциями из C^+.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Применение критерия Лебега интегрируемости по Риману	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2.2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	Суммируемые функции Действия над суммируемыми функциями. Интеграл в классе суммируемых функций Свойства интеграла.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Применение теоремы о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Применение теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и следствий из неё	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2.3	Мера множества	Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Применение теорем об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств, о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств, о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств, следствия о мере объединения измеримых	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911

		множеств, следствия о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.	
		Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2.4	Теория Лебега	Внешняя мера множества. Применение теоремы о внешней мере измеримого множества, теоремы об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Функции, измеримые по Лебегу. применение теоремы о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. применение теоремы о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Применение теоремы о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2.5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	Интегрирование по измеримому множеству. Использование простейших свойств. Применение теоремы об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Применение теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Случай бесконечного промежутка.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Случай функции двух независимых переменных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
	Пространства суммируемых функций	Пространства $L_p[a,b]$. Использование неравенства Гельдера. Норма для случая $1 \leq p < \infty$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
2.6		Пространство $L_\infty[a,b]$ (определение и норма).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практиче-	Лаборатор-	Самостоятельная	Всего

п			ские	ные	работа	
1	Измеримые функции и множество C^+	4	8		12	24
2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	3	6		9	18
3	Мера множества	2	4		6	12
4	Теория Лебега	4	8		12	24
5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	2	6		8	16
6	Пространства суммируемых функций	3	4		7	14
	Всего	18	36		54	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса «Действительный анализ» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Действительный анализ» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (коллоквиумам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (5 семестр – зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015.— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл.— <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf>.
2	Власова, Е. А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс] / Власова Е. А., Марчевский И. К. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2015 .— 400 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1958-6 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67481>.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский .— Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979 .— 587 с.
2	Функциональный анализ и интегральные уравнения : Лабораторный практикум : Учебное пособие для студ. мат. специальностей вузов / А.Б. Антоневич, Е.И. Ваткина, М.Х. Мазель и др. ; Под ред. А.Б. Антоновича и Я.В. Радыно .— Минск : БГУ, 2003 .— 178с.
3	Очан, Юрий Семенович. Сборник задач по математическому анализу. Общая теория множеств и функций : учебное пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.С. Очан ; под ред. М.Ф. Бокштейна .— М. : Просвещение, 1981 .— 269 с.
4	Шилов, Георгий Евгеньевич. Математический анализ. Второй специальный курс : учебное пособие для гос. ун-тов / Г.Е. Шилов .— М. : Наука, 1965 .— 327 с.
5	Дифференцирование и интеграл Лебега : Учебное пособие для студентов по специальности 010100 - Математика / Воронеж. гос. ун-т; Сост. В.В. Смагин .— Воронеж, 2003 .— 35 с. — Библиогр.: с. 34 .— <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/mar04065.pdf>.
6	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
1	Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/
2	Электронно-библиотечная система "Консультант студента" http://www.studmedlib.ru

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015.— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл.—

	<URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf>.
2.	Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .
3.	Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов; / В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf>.
4.	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог, лекция с применение современных компьютерных технологий (лекция-презентация), а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

В части освоения материала лекционных и практических занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс «*Действительный анализ*» *(*URL: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911*) на* портале «Электронный университет ВГУ».

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-6	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов к зачёту из п.20.2

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: практикоориентированные задания, домашние задания, контрольная работа

Задания для контрольной работы
Задание 1. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, быть множеством меры нуль?
Задание 2. Привести пример суммируемой функции, квадрат которой не суммируем.

Описание технологии проведения

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи, ограничение по времени 90 минут.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на контрольной работе используются следующие показатели:

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) умение применять полученные знания в практическом задании.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: КИМ (для зачёта) .

Перечень вопросов к зачету:

1. Лемма об объединении множеств меры нуль.
2. Лемма о действиях с измеримыми функциями. Следствие.
3. Леммы о последовательности неотрицательных ступенчатых функций.
4. Леммы о последовательности неотрицательных ступенчатых функций.
5. Лемма о действиях с функциями из C +.
6. Лемма о корректности определения C +-интеграла, следствие.
7. Теорема о предельном переходе в C +-интеграле, следствие.
8. Теорема об интегрировании функции по Риману в терминах функций x(t) и x(t). Следствие.

9. Лемма о действиях с суммируемыми функциями.
10. Леммы о свойствах интеграла в L(a, b).
11. Теорема Беппо Леви.
12. Следствия из теоремы Беппо Леви.
13. Теорема о несобственной интегрируемости и суммируемости функции.
14. Теорема Лебега.
15. Следствия из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
16. Теорема Фату.
17. Простейшие свойства измеримых множеств.
18. Теорема об объединении последовательности измеримых множеств. Следствие.
19. Теорема о мере объединения возрастающей последовательности измеримых множеств. Следствие.
20. Теорема о мере объединения последовательности измеримых множеств. Следствие.
21. Теорема о структуре измеримого множества положительной меры.
22. Теорема о мере измеримого множества как его внешней меры.
23. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры.
24. Функции, измеримые по Лебегу.
25. Определение интеграла по Лебегу от ограниченной измеримой функции. Теорема о множествах суммируемых функций и функций, интегрируемых по Лебегу.
26. Простейшие свойства интегрирования по измеримому множеству.
27. Теоремы о суммируемости функций по объединению измеримых множеств.
28. Теорема о достаточном условии суммируемости функции по прямоугольнику.
29. Два следствия из теоремы о достаточном условии суммируемости функции по прямоугольнику.
30. Пространство функций Lp(a, b) и неравенство Гельдера.
31. Норма в пространстве Lp(a, b) (обоснование). Замечание о пространстве L2(a, b).
32. Пространство L∞(a, b) (лемма и аксиомы нормы).

КИМ (для зачёта)

1. Лемма об объединении множеств меры нуль.
2. Простейшие свойства интегрирования по измеримому множеству.
3. Вычислить L-интеграл от характеристической функции множества кантора ненулевой меры, заданного на отрезке [0,1], если сумма длин смежных интервалов равна a, где $0<a<1$.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Действительный анализ» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. В ходе проведения зачёта обучающемуся выдается КИМ с двумя теоретическими вопросами и одной практической задачей и предлагается написать ответы на вопросы и решить задачу. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи. Ограничение по времени - 90 минут. При проведении зачета учитываются результаты контрольной работы. Если студент имеет зачёт по контрольной работе, то он освобождается от решения задачи на зачёте (№3 из КИМ для зачёта).

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям	*Базовый уровень*	*Зачтено*
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе или не может применить свои эти знания к решению задач	-	*Не зачтено*

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) закрытые задания (тестовые):

1. Верно ли, что любая суммируемая функция интегрируема по Риману в несобственном смысле?
Ответ: неверно.
Решение. В несобственном смысле интегрируема по Риману только такая суммируемая функция, которая неотрицательна и имеет особенность на конце отрезка.
2. Верно ли, что суммируемую функцию можно представить в виде разности двух функций из класса C^+ различными способами?
Ответ: верно.
Решение. Пусть почти всюду суммируемая функция $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Если, например, к функциям f, g прибавить константу, они не выйдут из класса C^+, при этом $x(t) = (f(t) + c) - (g(t) + c)$,
3. Верно ли, что значение C^+-интеграла от функции $x(t)$ зависит от выбора последовательности ступенчатых функций $\{h_n(t)\}$, сходящейся к $x(t)$?
Ответ: неверно.
Решение. Если значение интеграла зависит от выбора последовательности ступенчатых функций, то значение интеграла определено не однозначно, чего быть не может.
4. Верно ли, что последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к измеримой функции, единственна?
Ответ: неверно.
Решение. Если к измеримой функции $x(t)$ сходится последовательность ступенчатых функций $\{h_n(t)\}$, то сходится, например, и последовательность ступенчатых функций $\left\{h_n(t) + \frac{1}{n}\right\}$.
5. Верно ли, что значение интеграла в классе ступенчатых функций совпадает со значением интеграла Римана от ступенчатой функции?
Ответ: верно.

2) открытые задания:

1. Найти меру множества $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}\right\}$.

Ответ: 0.

Решение. Множество A является конечным. Всякое конечное множество является множеством меры нуль, значит, его мера равна нулю.

2. Найти меру множества $A = \{0; 1\}$.

Ответ: 0.

Решение. Множество A является конечным. Всякое конечное множество является множеством меры нуль, значит, его мера равна нулю.

3. Найти меру множества $A = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: 1.

Решение. Множество A представляет собой объединение двух не пересекающихся множеств. Значит, мера множества A есть сумма мер $\left[0; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$. Мера полуинтервала равна его длине. Значит, $\mu A = \mu \left[0; \frac{1}{2}\right) + \mu \left(\frac{1}{2}; 1\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

4. Найти меру множества $A = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$.

Ответ: 0.

Решение. Множество A является счетным. Всякое счетное множество является множеством меры нуль, значит, его мера равна нулю.

5. Найти меру множества $A = [0; 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ответ: 1.

Решение. Поскольку $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$ есть множество меры нуль, то $\chi_A(t) = 1$ почти всюду. $\mu A = I\chi_A = 1$.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).